Algèbres amassée. Introduction

Premier séance du
gp. de Travail
2013-10-17.

Exposé de O. KRAVCHENKO

— alg. amassées : anneaux
commutative munis de générateurs
distingués appelés variables d'amas
avec une structure combinatoire
particulière
— générateurs construits par un
process itéré appelé "mutation"
(contrairement le cas habituel —
où on a les générateurs + relation.
Ici : on a un sousensemble de generateurs distingués
(un amas) et une procedure comment
obtenir les autres générateurs

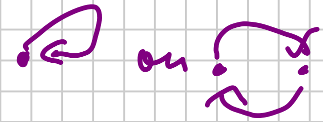
— structure est donnée par
un carquoi et relatations
entre generateurs sont codés
par les mutations de carquoi.

— Introduit par F-Z (2000)
— Connexions avec domains variés.
— ~800 articles sur arXiv avec
"cluster algebra" dans resumé

Plan
- Qu'est ce que une algèbre amassée?
  - Carquoi
  - Grain
  - mutation
  - définition
Exemple(s)
Resultats principaux, domains
d'application.

Carquoi Q.

- graph fini et orienté
- arcs multiples sont permis
- cycles orientés de longueur 1 et 2 sont interdits

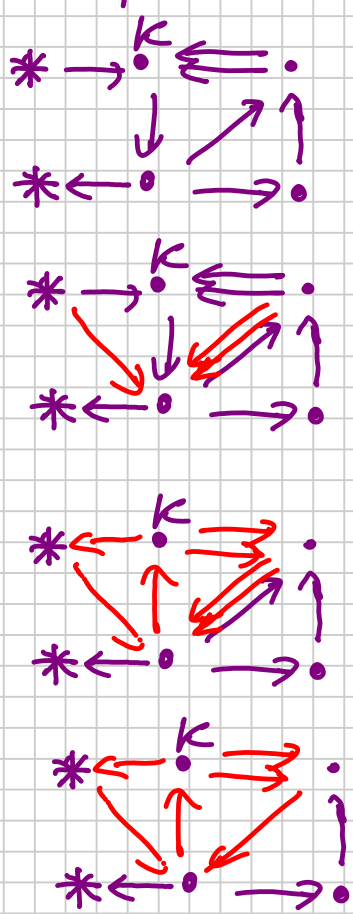


- 2 types de sommets: "gelés" et "mutables"
- ignore les arcs entre les sommets gélés

Mutation de carquoi:

Soit k - un sommet mutable de Q

$\mu_k : Q \to Q'$ est calculée en 3 étapes:



1. Pour chaque suite $j \to k \to l$ introduire un arc $j \to l$
2. Changer la direct. de tout arc incident à k
3. Enlever les 2-cycles.

Rq. Mutation est une involution

$$\mu_k(\mu_k(Q)) = Q$$

Relation d'équivalence:

Déf Deux carquoi sont équivalent par mutation si on peut obtenir un à partir de l'autre par une séquence de mutation.

Graine

Déf. Soit $\mathcal{F}$ un corps des fonctions rationnelles en m variables indep. sur $\mathbb{C}$.

Une graine dans $\mathcal{F}$ est un couple $(Q, \underline{x})$ de

- carquoi Q avec m sommets
- variables d'amas - m-tuple x de variables algébriquement indep. (éléments de $\mathcal{F}$) indéxés par les sommets de Q.

sommets gelés $\longleftrightarrow$ variables-coefficients

sommets mutable $\longleftrightarrow$ variables d'amas.

Terminologie:

amas $= \{$ variables d'amas $\}$

amas étendu (extended cluster) $= \left\{ \begin{array}{c} \text{variables d'amas} \\ + \text{ coeffs} \end{array} \right\}$

Mutation d'une graine

Soit k un sommet mutable de Q.
Soit x_k une variable d'amas correspondante.
Alors la mutation de la graine

$$\mu_k : (Q, \underline{x}) \longrightarrow (Q', \underline{x}')$$

- $Q' = \mu(Q)$
- $\underline{x}' = \{x_1, x_2 \dots x_{k-1}, x_k', x_{k+1} \dots x_m\}$

nouvelle fonction rationnelle avec x_k' définit par

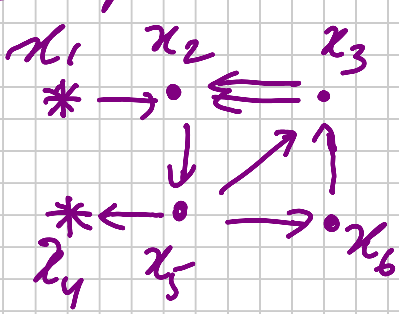
$$x_k x_k' = \prod_{\substack{j \leftarrow k \\ \text{dans } Q}} x_j + \prod_{\substack{j \rightarrow k \\ \text{dans } Q}} x_j$$

si pas du tout de $\leftarrow$ ou $\rightarrow$ à 1 ou à la place

relation d'échange – simple relation binomiale.

Rq. mutation d'une graine est une involution.

Exemple

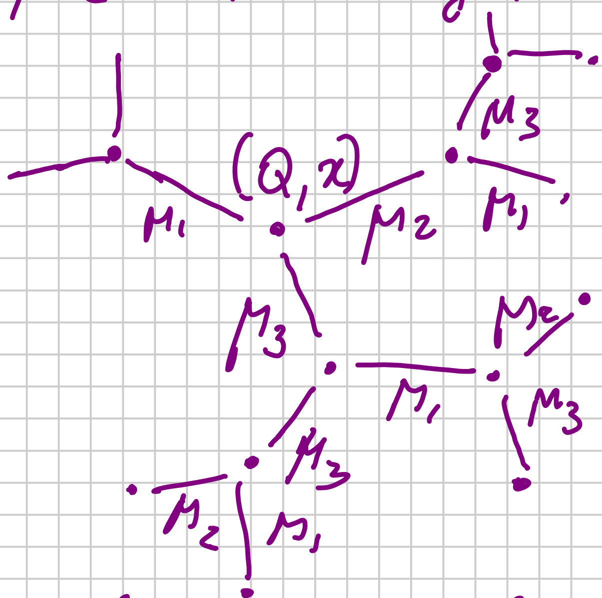


$$x_2' = \frac{x_1 x_3^2 + x_5}{x_2}$$

Nouvelle graine : Q' et

$$\left\{ x_1, \frac{x_1 x_3^3 + x_5}{x_2}, x_3, x_4, x_5, x_6 \right\}.$$

Graphe d'échange: $n=3$



Sommets

Graines

Finalement: <u>Définition de l'alg. amassée</u>.

Soit $(Q, \underline{x})$ une graine dans $\mathcal{F}$ t.q. Q a n sommets mutables. On considère un arbre n-régulier $\mathbb{T}_n$ en appliquant toutes séquences de mutation.

Soit $\mathcal{X}$ = union des variables d'amas et coeff. pour tout sommet de $\mathbb{T}_n$

alg. amassée: $\mathcal{A} = \mathcal{A}(Q)$

c'est un sous-anneau engendré par $\mathcal{X}$.

<u>Rq</u> $\mathcal{A}(Q)$ dépend que de classe d'équivalence de Q, pas de cas particulier.

Exemple

graine :

$$(Q, \underline{x}) = \underset{x_1}{\overset{1}{\bullet}} \longrightarrow \underset{x_2}{\overset{2}{\bullet}}$$

On calcul toute variable d'amas.

$$\underset{x_1}{\overset{1}{\bullet}} \longrightarrow \underset{x_2}{\overset{2}{\bullet}} \quad \xrightarrow{\mu_1} \quad \underset{\frac{x_2+1}{x_1}}{\overset{1}{\bullet}} \longleftarrow \underset{x_2}{\overset{2}{\bullet}}$$

$$\xrightarrow{\mu_2} \quad \underset{\frac{x_2+1}{x_1}}{\overset{1}{\bullet}} \longrightarrow \underset{\frac{\frac{x_2+1}{x_1}+1}{x_2} = \frac{x_1+x_2+1}{x_1 x_2}}{\overset{2}{\bullet}}$$

$$\xrightarrow{\mu_1} \quad \underset{}{\overset{1}{\bullet}} \longleftarrow \underset{\frac{x_1+x_2+1}{x_1 x_2}}{\overset{2}{\bullet}}$$

$$\frac{\frac{x_1+x_2+1}{x_1 x_2}+1}{x_2+1/x_1} = \frac{x_1+x_2+1+x_1 x_2}{(x_2+1)\, x_2} = \frac{x_1+1}{x_2}$$

$$\xrightarrow{\mu_2} \quad \underset{\frac{x_1+1}{x_2}}{\overset{1}{\bullet}} \longrightarrow \underset{}{\overset{2}{\bullet}} \qquad \frac{\frac{x_1+1}{x_2}+1}{x_1+x_2+1/x_1 x_2} = x_1$$

$$\xrightarrow{\mu_1} \quad \underset{\frac{x_1+1}{(x_1+1)/x_2} = x_2}{\overset{1}{\bullet}} \longleftarrow \underset{x_1}{\overset{2}{\bullet}}$$

Rqs sur cet exemple

1. Toute variable d'amas est un polynôme de Laurent en deux variables x_1 et x_2
2. Tout polynôme de Laurent a des coeffs positives (pas évident par exemple $\frac{x^3+1}{x+1} = x^2 - x + 1$)
3. # de variables d'amas est fini
4. (l'arbre 2-régulier devient un pentagon.

Chaque point 1. à 4 est un cas spécial de thm. ou conjecture pour l'algèbre amasée quelconque.

soit $A = \mathcal{A}(Q)$ une alg amassée avec une graine initiale $(Q, \underline{x})$

- Phénomène de Laurent : toute variable d'amas est un polynôme de Laurent en $\underline{x}$ (F+Z)

- Conj. de positivité Toute coeff de poly de Laurent est positive.

- Classification d'alg. amassées de type fini (on dit que A est de type fini si A a # de variables d'amas fini)

  Classifié par diagrammes de Dynkin (carquoi a pour graph une diag. de Dynkin).

- Quand A est de type fini sont graph d'échange - l'arbre n-régulier se replie pour devenir un 1-skelette de polytope appelé "associahedre généralisé". (Chapoton-F-Z)

Notions, généralisations, applications...

Cadre géométrique :

Q et mutations de Q - les mêmes

Nouvelles variables d'amas + règles de changement sous une mutation.

y-variables :

$$y_k = \prod_{j \to k} x_j \Big/ \prod_{j \leftarrow k} x_j$$

$$\mu_k(Q, \underline{y}) = (Q', y')$$

$$\mu_k(y_i) = \begin{cases} y_k^{-1}, & i = k \\ y_i \left(\dfrac{y_k}{1+y_k} \right)^{\ell}, & i \neq k,\ \ell = \#\ \overset{k}{\bullet} \longrightarrow \overset{i}{\bullet} \\ y_i (1+y_k)^{\ell} & \ell = \#\ \overset{k}{\bullet} \longleftarrow \overset{i}{\bullet} \end{cases}$$

. En préparant ces notes j'ai utilisé en particulier une présent. de L. Williams